Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice
Inspectoratul Şcolar al Judeţului Timiş

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
CLASA A XII-A (M_1 4 ore)

– ETAPA LOCALĂ – 19.02.2015 –

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I (7puncte)

- $x * y = \left(\frac{x}{y+1}(y+1)\right) * y = \frac{x}{y+1}\left((y+1) * y\right) = \frac{x}{y+1} \cdot 1 = \frac{x}{y+1}$ ………………2p
- $\sqrt{2} * \left(\sqrt{2}+1\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} = \sqrt{2} - 1$...………………………………………………...1p
- $x * (y * z) = x * \frac{y}{z+1} = \frac{x(z+1)}{y+z+1}$, $(x * y) * z = \frac{x}{y+1} * z = \frac{x}{(y+1)(z+1)}$,……….…..…..1p
- $(\exists)x, y, z > 0$ pentru care $x * (y * z) \neq (x * y) * z$ (de exemplu x=1,y=2,z=3), adică φ nu este lege asociativă……………………………………………………..1p
- Scrie legea elementului neutru………………………………………………………..1p
- φ nu admite element neutru……………………………………………………..1p

SUBIECTUL II (7puncte)

- Notăm $\varphi(x) = \sqrt[n]{e^x - e^{-x}}$, de unde $\varphi^n(x) = e^x - e^{-x}$ 2p
- $n\left(\varphi(x)\right)^{n-1}\varphi'(x) = e^x + e^{-x}$..1p
- Prin înmulţire cu $e^x - e^{-x}$ se obţine $n\varphi^{n-1}(x)\varphi'(x)\varphi^n(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ 2p
- $I = \int n\varphi^{2n-1}(x)\varphi'(x)\varphi(x)dx = n\int \varphi^{2n}(x)\varphi'(x)dx = n\frac{\varphi^{2n+1}(x)}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}(e^x - e^{-x})^{2n+1} + C$...2p

SUBIECTUL III (7puncte)

- f automorfism implică $f(xy) = f(x)f(y), (\forall)x, y \in G$………………………...2p
- $f(xy) = (xy)^{-1}, f(x)f(y) = x^{-1}y^{-1}$...……………………………………...2p
- $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$……………………………………………………......1p
- $e = xyx^{-1}y^{-1}$, de unde $y = (xy)x^{-1}$ şi yx=xy……………………..…………2p

SUBIECTUL IV (7puncte)

a. Demonstrează inegalitatea ……………………………………………….………2p

b.

- $n\int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}dx = \int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{a+x^n} = \int_0^1 x(\ln(a+x^n))'dx = x\ln(a+x^n)\Big|_0^1 - \int_0^1 \ln(a+x^n)dx$……………………………………………………..……….2p
- $\int_0^1 \ln(a+x^n)\,dx = \int_0^1 \ln a\left(1+\frac{x^n}{a}\right)dx = \ln a + \int_0^1 \ln(1+\frac{x^n}{a})dx$……………...…1p
- Foloseşte inegalitate **a.** $0 \leq \int_0^1 \ln(1+\frac{x^n}{a}) \leq \int_0^1 \frac{x^n}{a}dx = \frac{1}{a(n+1)}$……………………………………...1p
- Folosind criteriul cleştelui rezultă $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}dx = \ln\frac{a+1}{a}$……………...1p